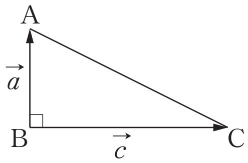
PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

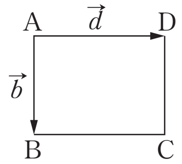
(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル

Point Pickup

練習

(1) 等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



(i) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル

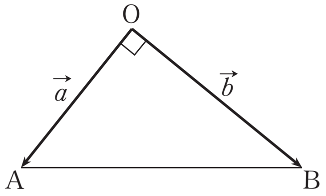
第 9 講　PART3 確認問題

1 等式 $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\vec{x}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b},\quad \vec{y}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}$$

である。

OA＝3，OB＝4，∠AOB＝90° の直角三角形 OAB がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。



2 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，$\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}$ である。

3 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な単位ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\vec{a}+\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{b}$$

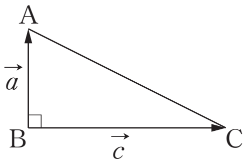
$$\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\vec{a}-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\vec{b}$$

PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$AB=1$，$BC=2$，$\angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{BC}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii)　$\overrightarrow{AC}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ …… ②とする。

① ＋ ②より　$3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

このとき，②より　$\vec{y}=-2\vec{x}+\vec{b}=-2\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2) (i)　$|\overrightarrow{BC}|=2$

よって，$\overrightarrow{BC}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

(ii)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a}$

また，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，$\overrightarrow{AC}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

$\overrightarrow{AC}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

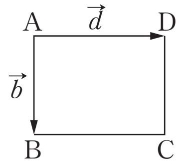
練習

(1) 等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $AB=3$，$AD=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(i) $\overrightarrow{AC}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii) $\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトル



(1) $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ …… ② とする。

①×5＋②×3より　$34\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\frac{5}{34}\vec{a}+\frac{3}{34}\vec{b}$

このとき②より　$5\vec{y}=-3\vec{x}+\vec{b}=-3\left(\frac{5}{34}\vec{a}+\frac{3}{34}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\frac{15}{34}\vec{a}+\frac{25}{34}\vec{b}$

よって　$\vec{y}=\frac{1}{5}\left(-\frac{15}{34}\vec{a}+\frac{25}{34}\vec{b}\right)=-\frac{3}{34}\vec{a}+\frac{5}{34}\vec{b}$

(2) (i) $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$

また，線分 AC は長方形 ABCD の対角線であることから

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

よって，$\overrightarrow{AC}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

(ii) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}$

$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AC}|=5$

よって，$\overrightarrow{BD}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{BD}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

$\overrightarrow{BD}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=\frac{1}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{d}$$

第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：7，ウ：2，エ：7，オ：3，カ：7，
キ：1，ク：7

[解説]

$$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a} \quad \cdots\cdots①$$

$$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b} \quad \cdots\cdots②$$

とする。

① ＋ ②×2 より **[A]**

$$7\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\vec{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

このとき，②より

$$\vec{y}=3\vec{x}-\vec{b}=3\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}\right)-\vec{b}$$

$$=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

[A]　ベクトルの演算
ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

2

[正解] ケ：1，コ：3

[解説]

$|\overrightarrow{OA}|=3$ であるから，

$\overrightarrow{OA}$ と同じ向きの単位ベクトルは，**[B]**

$$\frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{a}}$$

[B]　単位ベクトルとは，大きさが 1 のベクトルである。
$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルは，

$$\frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p}$$

3

[正解] サシ：-1，ス：5，セ：1，ソ：5，

タ：1，チ：5，ツ：1，テ：5

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な単位ベクトルのうち，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きのものは [C]

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と反対の向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$$

[C]　ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p}$ $\iff$

$\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

$\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。